УДК 519.14

В. В. Кабанов, А. А. Махнев

ГРАФЫ БЕЗ 3-ЛАП С РАВНОМОЩНЫМИ μ-ПОДГРАФАМИ*

Введение

Мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Далее всюду подграф из Γ будет означать индуцированный подграф графа Γ. Для вершины a графа Γ через $\Gamma(a)$ обозначим подграф на множестве всех вершин, смежных с a. Этот подграф называется окрестностью вершины a в графе Γ. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Пусть $a^\perp$ — подграф на множестве $[a]\cup\{a\}$. Для подграфа Δ графа Γ через $\Delta^\perp$ обозначим подграф на множестве $\bigcap\limits_{a\in\Delta} a^\perp$.

Через k_a обозначим валентность вершины a в Γ, т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется регулярным валентности k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Для ребра ac графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в подграфе $[a]\cap[c]$. Граф Γ называется реберно регулярным с параметрами (v,k,λ), если Γ — регулярный граф валентности k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках, т.е. $\lambda_{ac}=\lambda$ для любого ребра ac графа Γ. Подграф $[a]\cap[b]$ назовем μ-подграфом, если вершины a,b находятся на расстоянии 2 друг от друга в графе Γ.

Граф Γ на v вершинах валентности k называется μ-регулярным с параметрами (v,k,μ), если все его μ-подграфы имеют μ вершин. Если такой граф имеет диаметр 2, то он называется кореберно регулярным.

Пусть α — натуральное число. Под α-расширением графа Γ будем понимать граф Γ', полученный заменой каждой вершины a из Γ на α-клику (a), причем вершины из (a) и (b) смежны в Γ' тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ.

Граф (m,n) — это полный двудольный граф с долями порядка m и n. Граф $(1,m)$ называется m-лапой, если $m\geq 3$. Через $\{a;b_1,\ldots,b_m\}$ будем обозначать m-лапу, в которой вершина a смежна с вершинами $b_1,\ldots,b_m$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96-01-00488.

В работе [1] М. Нуматой получена классификация реберно регулярных графов, не содержащих 3-лап. Графы без 3-лап с несвязными μ-подграфами (не обязательно конечные) были изучены А. Броувером и М. Нуматой [2]. Авторами в [3] описаны все кореберно регулярные графы без 3-лап. Теорема 1 из работы авторов [4] снимает ограничение на диаметр графа. В настоящей статье продолжено исследование класса графов без 3-лап и доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* Γ *— неполный связный граф без 3-лап, в котором для некоторого фиксированного* $\mu > 0$ μ*-подграфы являются кликами из* μ *вершин. Тогда либо граф* Γ *является* α*-расширением графа икосаэдра, либо в* $\Gamma - \Gamma^{\perp}$ *подграф на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями является пустым, кликой или* α*-расширением связного графа с* $\mu = 1$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— связный граф без 3-лап, содержащий 3-коклику, в котором все* μ*-подграфы имеют одинаковое число вершин. Тогда либо* Γ *имеет диаметр больше двух и является графом из заключения теоремы 1, либо граф* Γ *является* α*-расширением одного из следующих графов:*

(1) *прямоугольной* $m \times n$*-решетки,* $m \geq 3$, $n \geq 3$;

(2) *треугольного графа* $T(m)$, $m \geq 6$;

(3) *графа Шлефли.*

Пусть X и Y — множества и $|X| = m$, $|Y| = n$. Напомним, что граф на множестве пар $X \times Y$ называется прямоугольной $m \times n$-решеткой, если пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ или $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, причем вершины $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны в $T(m)$ тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Если реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) является μ-регулярным с параметром μ, то он называется вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ). Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным.

Мы называем n-угольником $a_1 a_2 \ldots a_n$ связный регулярный граф валентности 2 на n вершинах, в котором $a_1 a_n$, $a_i a_{i+1}$ — ребра, $i = 1, \ldots, n-1$. Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф диаметра 3, в котором каждая вершина лежит в $a^{\perp} \cup b^{\perp}$ для любых двух вершин с $d(a, b) = 3$. Граф икосаэдра — это граф Тэйлора, в котором окрестность любой вершины является пятиугольником. Граф Тервиллигера — это неполный граф, в котором для некоторого фиксированного $\mu > 0$ все μ-подграфы являются кликами из μ вершин. Графом Шлефли называется сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, который является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$.

Ядром подграфа Δ, содержащего более одной вершины, мы будем называть подграф $K(\Delta) = \Delta^\perp \cap \Delta$. Ядром вершины a называется подграф $K(a) = \{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$. Число вершин в $K(a)$ будем обозначать через $\hat{a}$. Вершину a назовем редуцированной, если $K(a)$ состоит из единственной вершины, т.е. $\hat{a} = 1$. Граф Γ называется редуцированным, если все его вершины редуцированы. Пусть $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда $x^\perp = y^\perp$. Редукцией графа Γ называется фактор-граф $\overline{\Gamma}$ графа Γ по отношению $\equiv$.

В двух первых разделах статьи изучаются общие свойства связных графов без 3-лап. В начале третьего раздела описаны графы Тервиллигера без 3-лап. Конец третьего раздела и два последних посвящены доказательству теоремы 2, в которой получена классификация графов без 3-лап с равномощными μ-подграфами.

1. Некоторые общие свойства графов без 3-лап

Цель этого раздела — получение некоторых общих свойств графов без 3-лап без дополнительных ограничений. До конца раздела 2 через Γ обозначается связный граф, не содержащий 3-лап.

Лемма 1.1. *Пусть $a \in \Gamma$. Тогда:*

(1) *если b, c — несмежные вершины из $[a]$, то $[a] \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;*

(2) *для любого ребра ac из Γ подграф $[a] - c^\perp$ является кликой;*

(3) *если b, c — несмежные вершины из $\Gamma - a^\perp$, то μ-подграф $[b] \cap [c]$ содержится в $\Gamma - a^\perp$.*

Доказательство. Если вершина x из $[a]$ не лежит в $b^\perp \cup c^\perp$, то граф $\{a; b, c, x\}$ является 3-лапой и (1) доказано.

Из (1) следует (2).

Пусть выполнены условия пункта (3) леммы. Если x — вершина из $[a] \cap [b] \cap [c]$, то граф $\{x; a, b, c\}$ является 3-лапой.

Лемма 1.2. *Если $acbd$ — четырехугольник графа Γ, то:*

(1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;

(2) *если ce — ребро из $([a] \cap [b]) - d^\perp$, то $c^\perp$ и $e^\perp$ совпадают вне $[d]$.*

Доказательство. (1) По лемме 1.1 $[a], [b]$ содержатся в $c^\perp \cup d^\perp$. Симметрично, $[c]$ и $[d]$ содержатся в $a^\perp \cup b^\perp$.

Утверждение (2) следует из (1). Лемма доказана.

Скажем, что пара вершин a, b из Γ является сильной, если μ-подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой. Вершину a назовем сильной, если она содержится в некоторой сильной паре.

Лемма 1.3. *Пусть a, b — сильная пара.*

(1) *Если окрестность некоторой вершины x содержит μ-подграф $[a] \cap [b]$, то $x^\perp$ содержит $a^\perp$ или $b^\perp$.*

(2) *Если $x \in [a] - [b]$, то либо $[x] \cap [b]$ содержит несмежную с a вершину, либо $a^\perp$ содержит $x^\perp$, либо $[x] \cap [b]$ является кликой из $[a] \cap [b]$.*

Доказательство. Можно считать, что $x \notin \{a, b\}$. Ясно, что вершина x смежна точно с одной из вершин a, b. Пусть для определенности $x \in [a] - [b]$. По лемме 1.2(2) графы $x^\perp$ и $a^\perp$ совпадают вне $[b]$, поэтому $a^\perp \subseteq x^\perp$. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что $x \in [a] - [b]$ и граф $[x] \cap [b]$ содержится в $[a]$. Если $[x] \cap [b]$ — не клика, то по пункту (1) леммы $a^\perp$ содержит $x^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Лемма 1.4. *Пусть Δ — пятиугольник из Γ; Σ — такой подграф, что $\Sigma = x^\perp \cup y^\perp$ для любых несмежных вершин $x, y \in \Delta$. Тогда $\Sigma = \Gamma$.*

Доказательство. Покажем, что $[s] \subseteq \Sigma$ для $s \in \Sigma$. Достаточно доказать, что $[s]$ содержит несмежные вершины из Δ. Пусть $\Delta = \{x, y, z, u, w\}$ и вершины x, s не смежны. Тогда s смежна с вершинами z, u из $\Delta - [x]$ и еще по крайней мере с одной из вершин y, w. Итак, $[s] \subseteq \Sigma$ для $s \in \Sigma$. Теперь связность графа Γ влечет требуемое равенство. Лемма доказана.

Зафиксируем четырехугольник $acbd$ из Γ.

Лемма 1.5. *Если $e \notin a^\perp \cup b^\perp$ и подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то $x^\perp = b^\perp$ для любой не смежной с a вершины $x \in [c] \cap [d]$.*

Доказательство. По лемме 1.2(1) $a^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup x^\perp$, в частности, $[x]$ содержит $[b] \cap [e]$. Снова по лемме 1.2(1) $e^\perp \cup b^\perp = e^\perp \cup x^\perp$. Таким образом, $b^\perp$ и $x^\perp$ совпадают вне $a^\perp \cap e^\perp$. Утверждение леммы следует теперь из пункта (3) леммы 1.1. Лемма доказана.

В леммах 1.6–1.10 используются следующие обозначения: $\Sigma = a^\perp \cup b^\perp$, $X(\Sigma) = \{x \in \Sigma \mid x^\perp \subseteq \Sigma\}$.

Лемма 1.6. *Пусть $f \in \Gamma - \Sigma$ и $[f]$ пересекает Σ. Тогда:*

(1) $[w] \cap X(\Sigma)$ *является кликой для* $w \in [f] \cap \Sigma$;

(2) *если* $w \in [a] \cap [c] \cap [f]$, *то* $[w] \cap ([a] - c^{\perp})$ *лежит в* $[f]$.

Доказательство. Если $w \in [f] \cap \Sigma$ и $[w]$ содержит несмежные вершины $x, y \in X(\Sigma)$, то $[w] \subseteq x^{\perp} \cup y^{\perp}$. Противоречие с тем, что $f \in [w] - \Sigma$. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует из леммы 1.1. Лемма доказана.

В леммах 1.7–1.9 предполагается, что подграф $([a] \cap [b]) - d^{\perp}$ содержит ребро cx.

Лемма 1.7. *Если* $\Gamma_2(c) - \Sigma$ *содержит вершину* f, *то:*

(1) *графы* $[f] \cap [c]$ *и* $[f] \cap [x]$ *совпадают.*

Более того,

(2) *если* $[x] - c^{\perp}$ *содержит вершину из* $[a] - [b]$, *то* $[f] \cap [x] \subseteq [b]$;

(3) *если* $[f] \cap [c]$ *пересекает* $[a]$ *и* $[b]$, *то* $c^{\perp}$ *и* $x^{\perp}$ *совпадают вне* $[a] \cap [b] \cap [d]$.

Доказательство. Граф $[f] \cap [d]$ не пересекает $c^{\perp}$ и $x^{\perp}$, и по пункту (2) леммы 1.2 утверждение (1) выполняется.

Пусть $[x] - c^{\perp}$ содержит вершину g из $[a] - [b]$. Тогда $g \in [d]$ и по лемме 1.2(1) $\Sigma = b^{\perp} \cup g^{\perp}$. Но подграф $[x] \cap [f]$ не пересекает $[g]$ по пункту (1). Поэтому $[x] \cap [f]$ содержится в $[b]$. Утверждение (2) доказано, а (3) следует из (2).

Лемма 1.8. *Либо подграф* $(c^{\perp} - x^{\perp}) \cup (x^{\perp} - c^{\perp})$ *является кликой из* $[d]$, *либо* $\Gamma = \Sigma$.

Доказательство. Пусть лемма неверна. Так как $c^{\perp} - x^{\perp}$ и $x^{\perp} - c^{\perp}$ являются кликами, то $c^{\perp} - x^{\perp}$ содержит вершину z, не смежную с вершиной y из $x^{\perp} - c^{\perp}$. Ввиду пункта (2) леммы 1.2, $z, y \in [d]$. Если $z, y \in [a] \cap [b]$, то по леммам 1.2(1) и 1.4 $\Gamma = \Sigma$. Выберем теперь вершину w из $\Sigma - X(\Sigma)$. Пусть $z \in [a] - [b]$. Если $y \in [b] - [a]$, то вершины a, b входят в граф $\Delta = \{a, b, c, d, x, z, y\}$ симметрично. Без ограничения общности $w \in [a] - [b]$. Тогда вершина w смежна с z и не смежна с y, поэтому $w \in [c] \cap [x]$ по лемме 1.4. Но тогда $[w] \subseteq z^{\perp} \cup x^{\perp} \subseteq \Sigma$. Противоречие с выбором w.

Пусть теперь вершина y также смежна с a. Предположим сначала, что $w \in [a] - [b]$. Если вершина w смежна с d, то она не смежна с c, x, поэтому $w \in [z] \cap [y]$. Противоречие с тем, что $[w]$ не содержится в Σ. Если же вершина w не смежна с d, то она смежна с c, x, поэтому w не смежна с z, y и $[a]$ содержит 3-коклику w, z, y.

Пусть $w \in [b]-[a]$. Тогда вершина w не смежна с z, поэтому она смежна с y, x. Отсюда w не смежна с c, следовательно, $w \in [d]$. Противоречие с тем, что в этом случае $[w] \subseteq d^\perp \cup x^\perp \subseteq \Sigma$.

Лемма 1.9. *Если $[c] - x^\perp$ содержит вершину z из $[a] - [b]$, то либо подграф $(x^\perp - c^\perp)$ лежит в $[a]$, либо $\Gamma = \Sigma$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma \neq \Sigma$, w — вершина из $\Sigma - X(\Sigma)$ и $[x] - c^\perp$ содержит вершину y из $[b]-[a]$. По лемме 1.8 zy — ребро. Если w смежна с c, то она несмежна с d. Поэтому w смежна с z и x. Но тогда $[w] \subseteq z^\perp \cup x^\perp \subseteq \Sigma$. Противоречие с выбором w. Значит, w смежна с d и не смежна с c и x. Ввиду леммы 1.7(2), примененной к $[x] - c^\perp$ и $[c] - x^\perp$, вершина w содержится в $[a] \cap [b]$. Противоречие с выбором w, поскольку в этом случае $[w] \subseteq a^\perp \cup b^\perp \subseteq \Sigma$.

Лемма 1.10. *Если $e \in \Gamma_3(a)$ и $acbe$ — 3-путь, то μ-подграфы $[a] \cap [b]$, $[c] \cap [e]$ являются кликами.*

Доказательство. Допустим, что $[a] \cap [b]$ содержит несмежные вершины c, d. По лемме 1.2(1) $e \in c^\perp \cup d^\perp$. Противоречие с тем, что $e \in \Gamma_3(a)$. Лемма доказана.

Лемма 1.11. *Если Λ — связный граф, в котором все μ-подграфы регулярны одинаковой валентности, не являются кликами и имеют одинаковое число вершин, то Λ является регулярным графом.*

Доказательство. Пусть a, b — смежные вершины из Λ, c — произвольная вершина из $[a] - b^\perp$. Если $\mu = |[b] \cap [c]|$ и α — валентность μ-подграфа $[b] \cap [c]$, то вершина c смежна с $\mu - \alpha - 1$ вершиной из $[b] - a^\perp$. Теперь число ребер из $[b] - a^\perp$ в $[a] - b^\perp$ равно $|[b] - a^\perp|(\mu - \alpha - 1)$, а число ребер из $[a] - b^\perp$ в $[b] - a^\perp$ равно $|[a] - b^\perp|(\mu - \alpha - 1)$. Отсюда $|[b] - [a]| = |[a] - [b]|$ и, следовательно, $|[a]| = |[b]|$.

2. Сильные пары в графах без 3-лап

В этом разделе мы продолжим изучение вложения сильных пар в связный граф Γ без 3-лап.

Лемма 2.1. *Пусть* $a \in \Gamma$, $b, e \in \Gamma_2(a)$ *и вершина* c *из* $[a] \cap ([b] - e^{\perp})$ *смежна с* f *из* $[a] \cap ([e] - b^{\perp})$. *Тогда* $[c]$ *и* $[f]$ *совпадают на* $a^{\perp} - ([b] \cup [e])$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. По лемме 1.1 $[c] - b^{\perp}$ лежит в $f^{\perp}$ и $[f] - e^{\perp}$ содержится в $c^{\perp}$. Отсюда следует утверждение леммы.

В леммах 2.2–2.6 предполагается, что $\{a, b, e\}$ — 3-коклика из Γ и $[a] \cap [b]$ содержит несмежные вершины c, d.

Лемма 2.2. *Пусть* $[c] \cap [e]$ *содержит вершины* u *из* $[a]$ *и* w *из* $[b]$. *Если* $([a] \cap [b]) - d^{\perp}$ *содержит вершину* z, *не лежащую в* $K(c)$, *то для любой вершины* x *из* $([a] \cap [b] \cap [c]) - z^{\perp}$ *ее окрестность* $[x]$ *содержит* $[b] - ([a] \cup [e])$ *и* $[a] - ([b] \cup [e])$.

Доказательство. По лемме 1.7 $[c]$ и $[z]$ совпадают вне $[a] \cap [b] \cap [d]$. Далее, $[u] \cap ([b] - [a])$ лежит в $[e]$ и по лемме 1.1(1) $[c] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ лежит в $[x]$. Но $[b]$ содержится в $z^{\perp} \cup x^{\perp}$, поэтому $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[x]$. Симметрично, $[x]$ содержит $[a] - ([b] \cup [e])$.

Лемма 2.3. *Пусть* $[a] \cap [e]$ *содержит несмежные вершины* f, g. *Тогда:*

(1) *каждая вершина из* $[a] - ([b] \cup K(a))$ *смежна точно с одной вершиной из множеств* $\{c, d\}$, $\{f, g\}$ *(в частности, можно считать, что* cf, dg *— ребра);*

(2) *если* μ*-подграфы* $[c] \cap [g]$, $[f] \cap [d]$ *имеют непустое пересечение с* $[b] \cap [e]$, *то любая вершина из* $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$ *не смежна с вершинами из* $[f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$.

Доказательство. (1) Ввиду леммы 1.5, $([f] \cap [g]) - e^{\perp}$ лежит в $K(a)$ и $([c] \cap [d]) - b^{\perp}$ лежит в $K(a)$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

(2) Если u — вершина из $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$, смежная с $w \in [f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$, то $\{w, d, f\}$ является 3-кокликой из $[u]$. Противоречие.

В леммах 2.4–2.6 предполагается, что $[a] \cap [e]$ содержит несмежные вершины f, g, причем cf, dg — ребра в Γ.

Лемма 2.4. *Пусть* $[c] \cap [d]$ *содержит вершину* x *из* $[a] \cap [b]$. *Без ограничения общности* $x \in [g] - [f]$. *Тогда:*

(1) *графы* $[c]$, $[x]$ $([d], [g], [x])$ *совпадают на* $[b] - ([a] \cup [e])$ *(соответственно на* $[a] - ([b] \cup [e]))$;

(2) *если x не смежна с некоторой вершиной g' из $[d] \cap [a] \cap [e]$, то $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[c] \cap [x]$ и $[a] - ([b] \cup [e])$ содержится в $[d] \cap [x] \cap [g']$;*

(3) *если x смежна с некоторой вершиной f' из $[c] \cap [a] \cap [e]$, то $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[d]$ и $[a] - K(a)$ содержится в $[b] \cup [e]$.*

Доказательство. Заметим, что c не смежна с вершиной g из $[x]$, поэтому $[x] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ лежит в $[c]$. Симметрично, d не смежна с вершиной f из $[c]$, поэтому $[c] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ лежит в $[x]$. Первое утверждение из (1) доказано. Второе утверждение в (1) следует из леммы 2.1.

Пусть выполнены условия пункта (2) леммы. Тогда $[d] - [g']$ лежит в $[x]$, поэтому $[d] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ лежит в $[x]$. Из леммы 1.1 и утверждения (1) следует, что $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[c] \cap [x]$. По лемме 2.1 графы $[d]$, $[g']$ совпадают на $[a] - ([b] \cup [e])$. Из (1) теперь следует второе утверждение в (2).

Пусть выполнены условия пункта (3) леммы. Тогда $[x] - [f']$ лежит в $[d]$, поэтому $[x] \cap ([b] - ([a] \cup [e]))$ лежит в $[d]$. Из утверждения (1) следует, что $[b] - ([a] \cup [e])$ лежит в $[d]$. Далее, по лемме 2.1 графы $[x]$, $[f']$ совпадают на $[a] - ([b] \cup [e])$. Из (1) теперь следует второе утверждение в (3).

Лемма 2.5. *Пусть $[a] \cap [b]$ содержит 3-путь $cxyd$. Тогда:*

(1) *граф $[x] \cap [y]$ содержит $[b] - ([a] \cup [e])$;*

(2) *если $[x]$ пересекает $[b] \cap [e]$, то $[a] - ([b] \cup [e])$ лежит в $[y]$.*

Доказательство. Утверждение (1) следует непосредственно из леммы 2.1. Докажем утверждение (2). Заметим, что вершина u из $[b] \cap [e]$ смежна с x или y. Пусть $u \in [x] - [y]$. По лемме 1.2 граф $[x] - u^{\perp}$ лежит в $y^{\perp}$. Отсюда $[a] - ([b] \cup [e])$ содержится в $[y]$.

Лемма 2.6. *Пусть $[b] \cap [e]$ содержит несмежные вершины u, w и cu, dw — ребра в Γ. Если $[a] \cap [b]$ содержит смежную с c, d вершину x, то либо $x \in [u] - [w]$ и или x, e — сильная пара, или подграф c, d, f, g, u, w является шестиугольником, либо $x \in [w] - [u]$ и $[b] - K(b)$ содержится в $[a] \cup [e]$, $[a] - K(a)$ содержится в $[b] \cup [e]$.*

Доказательство. Без ограничения общности $x \in [g] - [f]$. Допустим сначала, что $x \in [u] - [w]$. В этом случае либо вершины u, g из $[x] \cap [e]$ не смежны, либо ug — ребро и подграф $\{c, d, f, g, u, w\}$ является шестиугольником.

Допустим теперь, что $x \in [w] - [u]$. В этом случае по лемме 2.1 графы $[x]$, $[w]$ и $[d]$ совпадают на $[b] - ([a] \cup [e])$ и по пункту (1) леммы 2.4 $[b] - K(b)$ содержится в $[a] \cup [e]$. Симметрично, $[a] - K(a)$ содержится в $[b] \cup [e]$.

3. Графы без 3-лап с равномощными μ-подграфами

Пусть до конца работы граф Γ является связным графом без 3-лап с равномощными μ-подграфами. Следующее утверждение является вариантом одной леммы Тервиллигера из [5].

Лемма 3.1. *Пусть Σ – связный граф Тервиллигера диаметра 2. Тогда для любого ребра bc из $\Sigma - \Sigma^{\perp}$ найдется вершина d, несмежная с b и c.*

Доказательство. Пусть Σ содержится в $b^{\perp} \cup c^{\perp}$ для некоторого ребра bc из $\Sigma - \Sigma^{\perp}$. Ясно, что $b^{\perp}$ и $c^{\perp}$ не инцидентны. Значит, разность $[b] - c^{\perp}$ содержит некоторую вершину x, а $[c] - b^{\perp}$ содержит некоторую вершину y из Σ. Заметим, что вершины x и y не смежны, иначе $[x] \cap [c]$ содержит несмежные вершины b и y. Теперь граф $[x] \cap [y]$ содержится в $[b] \cap [c]$. В самом деле, если z — несмежная с b вершина из $[x] \cap [y]$, то z смежна с c по предположению и $[b] \cap [z]$ содержит несмежные вершины x и c. Теперь $[y] \cap [b]$ содержит весь μ-подграф $[x] \cap [y]$ и вершину c. Противоречие.

Лемма 3.2. *Пусть Γ — связный граф Тервиллигера без 3-лап. Тогда либо Γ является α-расширением графа икосаэдра, либо в $\Gamma - \Gamma^{\perp}$ подграф на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями является пустым, кликой или α-расширением связного графа с $\mu = 1$.*

Доказательство. Пусть Γ является контрпримером к утверждению леммы и имеет наименьшее число вершин. Γ' — подграф из Γ на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями. Очевидно, что все μ-подграфы из Γ содержатся в Γ' и поэтому Γ' является связным графом.

Предположим, что $\Gamma = \Gamma'$. Если $a, b \in \Gamma$ и $d(a,b) = 2$, то для любой вершины $c \in [a] \cap [b]$ получим равенство $k_c = 2 + \lambda_{ac} + \lambda_{bc} - (\mu - 1)$.

Вершину $c \in \Gamma$ такую, что $\hat{c} < \mu$, назовем хорошей. Покажем, что для любой хорошей вершины c граф $\Lambda_c = [c] - [c]^{\perp}$ регулярен валентности λ для некоторого фиксированного λ. По выбору вершины c граф Λ_c — связный граф Тервиллигера. Пусть xy — ребро графа Λ_c. По лемме 3.1 $[c]$ содержит вершину z, не смежную с x, y. Как и выше, $k_c = 3 - \mu + \lambda_{cx} + \lambda_{cz}$, поэтому $\lambda_{cx} = \lambda_{cy}$ и Λ_c — регулярный граф.

Положим $\Lambda = \Lambda_c$, $\alpha = |[c]^{\perp}|$. Для $x \in \Lambda$ через $K(c,x)$ обозначим ядро вершины x в графе Λ. По предложению 1.16.2 из [6] все ядра $K(c,x)$ состоят из s вершин и редукция $\overline{\Lambda}$ является сильно регулярным графом Тервиллигера без 3-коклик с параметрами $(\overline{v}, \overline{k}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$, где

$$\overline{v} = \frac{k_c - \alpha + 1}{s}, \quad \overline{k} = \frac{\lambda + 2 - s}{s}, \quad \overline{\mu} = \frac{\mu - \alpha}{s}$$

и $\overline{\lambda}$ находится из прямоугольного соотношения. По теореме Тэйлора–Ливингстона [6, теорема 1.5.3] сильно регулярный неполный граф Терwillигера без 3-лап является пятиугольником, поэтому $\mu = \alpha + s$, $\lambda = 3s - 2$, $k_c = 5s + \alpha - 1$.

Выберем хорошую вершину c наибольшей валентности в Γ. Заметим, что $[c]^\perp$ состоит из хороших вершин, поэтому $K(c) = [c]^\perp$. Если a — хорошая вершина из Λ, то граф $[a] - [a]^\perp$ является регулярным валентности λ'. Отсюда любое ядро $K(a, x)$ состоит из s' вершин, $|[a]^\perp| = \alpha'$, причем $\mu = \alpha' + s'$, $\lambda' = 3s' - 2$, $k_a = 5s' + \alpha' - 1$. Но $\lambda_{ac} = \lambda + \alpha - 1 = \lambda' + \alpha' - 1$, поэтому $s = s'$, $\alpha = \alpha'$ и $k_a = k_c$. В частности, $[a]^\perp = K(a)$.

Покажем, что любая смежная с c вершина a является хорошей. Действительно, в противном случае граф $a^\perp \cap c^\perp$ является $(\lambda + \alpha + 1)$-кликой из $a^\perp$. С другой стороны, граф $\Lambda(a)$ не является кликой.

Из связности графа Γ получаем, что $\hat{x} = \alpha$, $k_x = k_c$ для любой вершины $x \in \Gamma$. Таким образом, редукция $\overline{\Gamma}$ — вполне регулярный граф Тервиллигера. По теореме Тэйлора–Ливингстона [6, теорема 1.5.3] вполне регулярный граф Тервиллигера без 3-лап либо имеет $\mu = 1$, либо является графом икосаэдра. Противоречие с выбором графа Γ.

Предположим, что $\Gamma' \neq \Gamma$. Тогда Γ' имеет меньше вершин, чем Γ, и удовлетворяет заключению леммы.

Пусть Γ' является α-расширением графа икосаэдра, $a \in \Gamma - \Gamma'$, $b \in [a] \cap \Gamma'$. Тогда $[b]$ содержит 3-коклику $\{a, x, y\}$ для некоторой пары несмежных вершин x, y из $[b] \cap \Gamma'$. Противоречие.

Пусть $K(\Gamma')$ — пустой подграф и подграф из Γ' на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями в Γ' является α-расширением связного графа с $\mu = 1$. Поскольку Γ является контрпримером, то в Γ' есть вершины с кликовой окрестностью в Γ'.

Пусть $a \in \Gamma'$ и $[a] \cap \Gamma'$ — клика. Тогда в $[a]$ существуют несмежные вершины b, c такие, что $b \in \Gamma'$, $c \notin \Gamma'$. Покажем, что $[b] \cap [c]$ содержится в $K(a)$. Действительно, так как $[a] \cap \Gamma'$ — клика, содержащая $[b] \cap [c]$, то $[b] \cap [c] = [c] \cap \Gamma'$. Но тогда если для некоторой вершины $y \notin [b] \cap [c]$ пересечение $[y]$ с $[b] \cap [c]$ не пусто, то $|[y] \cap [c]| = |[b] \cap [c]|$ влечет $[y] \cap [c] = [b] \cap [c]$. Тогда $[b] \cap [c] \subseteq K(a)$ и Γ' является α-расширением связного графа с $\mu = 1$. Противоречие с выбором Γ.

Пусть $K(\Gamma')$ — непустой подграф и подграф из Γ' на множестве вершин с некликовыми окрестностями в Γ' является пустым, кликой или α-расширением связного графа с $\mu = 1$. Пусть $b \in \Gamma - \Gamma'$. Если $|[b] \cap \Gamma'| > \mu$, то $K(\Gamma')$ содержится в $[b] \cap \Gamma'$. Предположим, что a_1, a_2 — произвольные различные вершины из $\Gamma' - [b]$. Если a_1 не смежна с a_2, то $\{a_1, a_2, b\}$ будет

3-кокликой в окрестности некоторой вершины из $K(\Gamma')$, что невозможно. Если a_1 смежна с a_2 и $[a_1] \cap [b] \neq [a_2] \cap [b]$, то для некоторых вершин $u \in ([a_1] \cap [b]) - [a_2]$ и $w \in ([a_2] \cap [b]) - [a_1]$ μ-подграф $[a_1] \cap [w]$ содержит несмежные вершины a_2, u. Значит, $[a_1] \cap [b] = [a_2] \cap [b]$ для любой пары вершин из $\Gamma' - [b]$. Но тогда Γ' является α-расширением связного графа с $\mu = 1$ и опять противоречие с выбором графа Γ.

Теперь $|[b] \cap \Gamma'| = \mu$ для любой вершины $b \in \Gamma - \Gamma'$. Покажем, что в этом случае $u^\perp = w^\perp$ для любых вершин u, w из $[b] \cap \Gamma'$. Действительно, если $x \in [u] - [w]$ и $x \in \Gamma'$, то $|[x] \cap [b]| < \mu$. Если $x \notin \Gamma'$, то xb — ребро, иначе опять $|[x] \cap [b]| < \mu$. Но тогда μ-подграф $[x] \cap [w]$ содержит вершину b, что противоречит выбору b. Так как $u^\perp = w^\perp$ для любых вершин u, w из $[b] \cap \Gamma'$, то либо $K(\Gamma') = \Gamma'$, либо $K(\Gamma') \cap [b]$ является пустым множеством. В первом случае граф Γ не противоречит заключению леммы. Во втором случае подграф $\Gamma' - (K(\Gamma') \cup [b])$ является кликой и, значит, Γ' — снова α-расширение связного графа с $\mu = 1$. Таким образом, контрпримера к лемме 3.2 не существует.

Лемма 3.3. *Пусть a, b — вершины из Γ, находящиеся на расстоянии 2, $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, $x \in K([a] \cap [e])$, y — несмежная с x вершина из $K([b] \cap [e])$.*

(1) *Если $d(x, b) = d(y, a) = 2$, то подграф $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$.*

(2) *Если a, b — сильная пара, то выполняется заключение утверждения* (1).

Доказательство. (1) Пусть $[x]$ содержит α вершин из $[a] \cap [b]$ и $\mu - \alpha$ вершин из $[b] \cap [e]$, $[y]$ содержит β вершин из $[a] \cap [b]$ и $\mu - \beta$ вершин из $[b] \cap [e]$. Тогда $[x] \cap [y]$ содержит e, $\mu - \alpha$ вершин из $[b] \cap [e]$ и $\mu - \beta$ вершин из $[a] \cap [e]$. Отсюда $(\mu - \alpha) + (\mu - \beta) < \mu$ и $\mu < \alpha + \beta$. Таким образом, $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$.

(2) Если a, b — сильная пара, то $d(x, b) = d(y, a) = 2$ по лемме 1.2(1). Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если Γ является графом Тервиллигера без 3-лап и содержит 3-коклику, то Γ имеет диаметр больше 2.*

Доказательство. Пусть $\{x, y, z\}$ является 3-кокликой из Γ и диаметр Γ равен 2. Если для некоторой вершины u из $[x] \cap [z]$ найдется несмежная с ней вершина w из $[y] \cap [z]$, то по лемме 3.3(1) x является сильной вершиной. Противоречие с определением графа Тервиллигера. Значит, любая вершина из $[x] \cap [z]$ смежна с любой вершиной из $[y] \cap [z]$. Но тогда ни одна вершина из $[x] \cap [y]$ не смежна ни с одной вершиной из $([x] \cap [z]) \cup ([y] \cap [z])$. Противоречие с условием на диаметр графа. Лемма доказана.

Далее до конца раздела Γ является связным графом без 3-лап с равномощными μ-подграфами, который содержит четырехугольник $acbd$.

Лемма 3.5. *Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ и μ-подграф $[b] \cap [e]$ является кликой. Тогда для любой вершины $x \in K([a] \cap [e])$ найдется несмежная с ней вершина $y \in [b] \cap [e]$, и для любой такой пары x, y подграф $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$. В частности, пары x, y и e, z являются сильными.*

Доказательство. Пусть $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ и вершина x принадлежит $K([a] \cap [e])$. Пусть для определенности $x \in [c] - [d]$. Тогда $[x]$ содержит μ вершин из $[b]$, причем $[x] - a^{\perp}$ лежит в $[b] \cap [e]$. Далее, $[x]$ содержит вершину c из $[a] \cap [b]$, поэтому x не смежна с некоторой вершиной y из $[b] \cap [e]$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 3.3(2). Лемма доказана.

Замечание. Если e вершина из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, то либо она имеет некликовый μ-подграф с вершинами a или b, либо оба μ-подграфа $[a] \cap [e]$, $[b] \cap [e]$ являются кликами. В первом случае e — сильная вершина по определению, во втором — по лемме 3.5. Следовательно, все вершины из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ являются сильными.

Лемма 3.6. *Если a является сильной вершиной из Γ, то $\Gamma_3(a)$ — пустой граф.*

Доказательство. Пусть $e \in \Gamma_3(a)$ и $afge$ — 3-путь. Пусть $g \in [b]$. Тогда μ-подграф $[a] \cap [g]$ лежит в $b^{\perp}$, иначе $[g]$ содержит b, e и вершину из $([a] \cap [g]) - [b]$, которые образуют 3-коклику. Отсюда $[a] \cap [g] = [a] \cap [b]$. Противоречие, так как первый подграф является кликой по лемме 1.10, а второй содержит несмежные вершины c, d. Значит, $[g]$ не содержит вершин, образующих сильную пару с вершиной a.

Пусть $c \in \Gamma_2(e)$. Тогда некоторая вершина $x \in [c] \cap [e]$ смежна с b. Мы получили 3-путь $acxe$, в котором вершина x смежна с b. Противоречие, как и в предыдущем абзаце. Отсюда следует, что $c \notin \Gamma_2(e)$. Симметрично, $d \notin \Gamma_2(e)$. Но тогда и $b \notin \Gamma_2(e)$.

Если $g \in \Gamma_2(b)$, то по лемме 3.5 g образует сильную пару с некоторой вершиной $x \in [a] \cap [b]$. Пусть y, z — несмежные вершины из $[x] \cap [g]$. Тогда e смежна с одной из этих вершин, например с y. В этом случае

$y \in \Gamma_2(a) \cap [b]$. Заменив g на вершину y, а f — на вершину из $[a] \cap [y]$ в 3-пути $afge$, опять получим противоречие. Значит, $g \notin b^\perp \cup \Gamma_2(b)$.

По лемме 1.2 $f \in [c] \cup [d]$. Пусть для определенности fc — ребро. Тогда мы получим путь $bcfg$ и $g \in \Gamma_3(b)$. Противоречие с тем, что $[f]$ содержит вершину a, которая образует сильную пару с b.

Таким образом, $\Gamma_3(a)$ пусто. В частности, $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Граф* Γ *имеет диаметр* 2.

Доказательство. Пусть Γ имеет диаметр больше 2 и вершины f, g находятся на расстоянии 3 друг от друга. По лемме 3.6 f, g не являются сильными вершинами. Из замечания после леммы 3.5 $f, g \in x^\perp \cup y^\perp$ для любой сильной пары x, y. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $f \in ([a] \cap [c]) - ([b] \cup [d])$, $g \in ([b] \cap [d]) - ([a] \cup [c])$.

По лемме 3.6 $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. Пусть $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ не пусто и $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. По лемме 3.5 e — сильная вершина и, значит, e смежна точно с одной из вершин в $\{f, g\}$. Пусть e смежна с g. Если μ-подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой, то он содержит сильную пару x, y и, значит, $[f] \cap [b] \cap [e]$ не пусто. Тогда f содержится в $x^\perp \cup y^\perp$. Противоречие с выбором f, так как $x^\perp \cup y^\perp = b^\perp \cup e^\perp$. Далее μ-подграф $[a] \cap [e]$ не может быть кликой, поскольку в противном случае по лемме 3.5 вершина g будет сильной, противоречие. Так как f не является сильной вершиной, то μ-подграфы $[f] \cap [b]$ и $[f] \cap [e]$ являются кликами, причем вершина $c \in [f] \cap [b]$ не смежна с некоторой вершиной h из $[f] \cap [e]$. Заметим, что $d(h, b) = 2$. Действительно, если $h \in [a]$, то это следует из леммы 1.2(1). Если $h \in [e] - [a]$, то вершина h — сильная и $d(h, b) = 2$ по лемме 3.6. Теперь по лемме 3.3(1) f — сильная вершина. Опять по лемме 3.6 $d(f, g) = 2$. Противоречие с выбором вершин f, g.

Мы доказали, что $\Gamma_2(x) \cap \Gamma_2(y)$ пусто и, следовательно, $\Gamma = x^\perp \cup y^\perp$ для любой сильной пары x, y. Так как $[f] \cap [b]$ не содержит d, то f смежна с некоторой вершиной w из $[b] - [a]$. Так как $d(f, g) = 3$, то w не смежна с g. Заметим, что $[f] \cap [b]$ — клика, значит, wc — ребро. В то же время w не смежна с d, поскольку в противном случае wb — ребро из $([c] \cap [d]) - a^\perp$. По лемме 1.2(2) $w^\perp$ и $b^\perp$ совпадают вне $[a]$. Однако $w^\perp$ не содержит g из $b^\perp - [a]$.

Рассмотрим теперь 3-коклику $\{a, w, g\}$. Подграфы $[a] \cap [g]$ и $[w] \cap [g]$ являются кликами, так как вершина g не может быть сильной по лемме 3.6. Более того, μ-подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $b^\perp - [a]$. Если $[w] \cap [g]$ не содержится в $[d]$, то по лемме 3.3(1) вершина d из $[a] \cap [g]$ образует сильную пару с некоторой вершиной u из $([w] \cap [g]) - [d]$. Но тогда вершина g является сильной. Противоречие с леммой 3.6. Значит, μ-подграф $[w] \cap [g]$ содержится в $(b^\perp - [a]) \cap [d]$.

Симметрично, μ-подграф $[g] \cap [a]$ не содержит вершину c, значит, g смежна с некоторой вершиной z из $[a] - [b]$. Так как $d(f, g) = 3$, то z не смежна с f. Подграф $[g] \cap [a]$ — клика, zd — ребро и z не смежна с вершинами c, w.

Если $d(w, z) = 2$, то по лемме 3.3(1) вершина w из $[f] \cap [b]$ образует сильную пару с вершиной a из $([f] \cap [z]) - [w]$. Но тогда вершина f является сильной. Противоречие с леммой 3.6.

Следовательно, $d(w, z) = 3$. Как и выше, в этом случае μ-подграф $[g] \cap [w]$ содержится в $[c]$. Но тогда μ-подграф $[g] \cap [w]$ содержится в μ-подграфе $[c] \cap [d]$, и, значит, $[g] \cap [w] = [c] \cap [d]$. Противоречие с тем, что $[g] \cap [w]$ не содержит a из $[c] \cap [d]$. Лемма доказана.

До конца статьи будем предполагать, что граф Γ является контрпримером к теореме 2 и содержит наименьшее число вершин.

Лемма 3.8. *Граф Γ не содержит 4-коклик.*

Доказательство. Пусть $\{w, x, y, z\}$ является 4-кокликой из Γ и $u \in \{w, x, y, z\}$.

По леммам 1.1(3) и 3.7 $\Gamma - u^\perp$ является связным подграфом из Γ, содержащим 3-коклику. Следовательно, он удовлетворяет условию теоремы 2. Так как Γ — контрпример с наименьшим числом вершин, то $\Gamma - u^\perp$ удовлетворяет заключению теоремы 2. Если $\Gamma - u^\perp$ — граф Тервиллигера, то по лемме 3.4 он имеет диаметр больше двух. Так как подграф $\Gamma - u^\perp$ имеет диаметр 2, то он содержит четырехугольник. Все такие графы из заключения теоремы 2 являются регулярными графами.

Далее, Γ не содержит 3-лап, поэтому любая вершина из Γ не может быть смежна более чем с двумя вершинами из 4-коклики. Таким образом, эта вершина принадлежит пересечению антиокрестностей по крайней мере двух вершин из $\{w, x, y, z\}$. Из того, что Γ является связным графом, следует, что валентности всех вершин совпадают. По теореме 1 из работы [4] граф Γ не является контрпримером к теореме 2.

Лемма 3.9. *Если $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, то граф $[a] \cap [e]$ пересекает $[c]$ и $[d]$.*

Доказательство. Допустим, что $\Delta = ([a] \cap [e]) \cup ([b] \cap [e])$ и $[a] \cap \Delta = [c] \cap \Delta$. По лемме 1.3(2) $[a] \cap \Delta$ и $\Delta - [a]$ являются кликами. Если $f \in [a] \cap \Delta$, то по лемме 3.5 в $\Delta - [a] = [b] \cap [e]$ найдется несмежная с f вершина u такая, что $[f] \cap [u]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$. По лемме 1.1 вершина z лежит в $[c] \cap [d]$. Так как $[a] \subset c^\perp \cup d^\perp$, то по лемме 2.1 подграф $a^\perp - ([b] \cup [e])$ содержится в $[x]$ для любой вершины x из $([a] \cap \Delta) \cup \{z, c\}$. Симметрично, подграф $b^\perp - ([a] \cup [e])$ содержится в $[y]$ для любой вершины y из $([b] \cap \Delta) \cup \{z, d\}$.

По лемме 3.8 $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$ является кликой и, следовательно, $\Gamma - e^\perp$ содержится в $a^\perp \cup b^\perp$. Так как Γ имеет равномощные μ-подграфы, то μ-подграф $[a] \cap [e]$ лежит в $(a^\perp - [b])^\perp$, μ-подграф $[b] \cap [e]$ лежит в $(b^\perp - [a])^\perp$, ни одна вершина из $[a] \cap [b]$ не смежна ни с одной вершиной из $\Gamma - e^\perp$ и ни одна вершина из $\Gamma - e^\perp$ не смежна ни с одной вершиной из $e^\perp - ([a] \cup [b])$. Значит, $e^\perp = K(e) \cup \Delta$.

Теперь для любой вершины x из $[a] \cap \Delta$ имеем $x^\perp = K(e) \cup (a^\perp - [b]) \cup ([x] \cap [b])$. Для любой вершины y из $[b] \cap \Delta$ имеем $y^\perp = K(e) \cup (b^\perp - [a]) \cup ([y] \cap [a])$. Отсюда $k_x = k_a + \hat{e}$ и $k_y = k_b + \hat{e}$.

Пусть $v = |\Gamma|$. Тогда, с одной стороны, $v = 2 + k_a + k_b - \mu + \hat{e}$. С другой стороны, $|z^\perp \cup e^\perp| = 2 + k_f + k_u - \mu = 2 + (k_a + \hat{e}) + (k_b + \hat{e}) - \mu$. Противоречие. Лемма доказана.

Для вершин x, y, находящихся на расстоянии 2 в Γ, положим $\Delta(x, y) = K(x) \cup K(y) \cup ([x] \cap [y])$. Пусть Δ — такой подграф из Γ, что $K(x) \subseteq \Delta$ для любой вершины $x \in \Delta$, а $\overline{\Delta}$ — фактор-граф, полученный из Δ так, что $\overline{x} = K(x)$ для $x \in \Delta$. Тогда Δ назовем ядерным расширением $\overline{\Delta}$.

Через $\mathcal{K}$ обозначим класс графов, состоящий из 2-коклики и полных многодольных графов с долями порядка 2.

Лемма 3.10. *Пусть $e \in \Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$. Тогда:*

(1) *если xy — ребро из $[a] \cap [b] - ([a] \cap [b])^\perp$ и $[x] \cap [e] = [y] \cap [e]$, то $x^\perp = y^\perp$;*

(2) *граф $\Delta(a, b) - ([a] \cap [b])^\perp$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$;*

(3) *$\Delta(a, b) = \Delta(c, d)$ и $\hat{c} + \hat{d} = \hat{a} + \hat{b}$ для любых несмежных вершин c, d из $[a] \cap [b]$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия пункта (1) леммы. Для $w \in [x] \cap [e]$ получим равенство $[w] \cap x^\perp = [w] \cap y^\perp$, в противном случае, например, окрестность w содержит 3-коклику e, y и вершину из $[x] - [y]$. По лемме 3.9 $[x] \cap [e]$ пересекает $[a]$ и $[b]$. Пусть z — не смежная с x вершина из $[a] \cap [b]$. Тогда z не смежна с y, иначе по лемме 3.9 $[y] \cap [e]$ пересекает $[x]$ и $[z]$. Противоречие с условием $[x] \cap [e] = [y] \cap [e]$. Теперь по лемме 1.7(3) графы $x^\perp$, $y^\perp$ совпадают вне $[a]\cap[b]\cap[z]$. Итак, $x^\perp = y^\perp$, утверждение (1) доказано.

Пусть $x \in [a]\cap[b]-([a]\cap[b])^\perp$ и yz — ребро из $([a]\cap[b])-x^\perp$. По лемме 1.2(2) $[y]\cap[e]=[z]\cap[e]$ и из пункта (1) следует, что $z^\perp = y^\perp$. Это влечет утверждение из пункта (2).

Из пункта (2) следует равенство $\Delta(a,b)-([a]\cap[b])^\perp = \Delta(c,d)-([c]\cap[d])^\perp$ для любых несмежных вершин c,d из $[a]\cap[b]$. Пусть $z\in([a]\cap[b])^\perp$ и $z\notin([c]\cap[d])^\perp$ для некоторой пары несмежных вершин c,d из $[a]\cap[b]$. Тогда без ограничения общности рассуждений найдется вершина x из $[a]-(b^\perp\cup e^\perp)$, которая смежна с c,d и не смежна с z. Из равенства $|[a]\cap[b]|=|[x]\cap[b]|$ следует, что в $[b]-(a^\perp\cup e^\perp)$ есть вершина y, смежная с x. Без потери общности рассуждений можно считать, что y смежна с вершиной c. Из равенств $a^\perp\cup b^\perp = c^\perp\cup d^\perp$ и $c^\perp\cup d^\perp = x^\perp\cup z^\perp$ следует, что y смежна z. Если y смежна с d, то yz — ребро из μ-подграфа $[c]\cap[d]$ вне $x^\perp$. По (2) $y^\perp = z^\perp$. Противоречие, так как y не смежна с вершиной a. Если y не смежна с d, то yc — ребро из μ-подграфа $[x]\cap[b]$ вне $d^\perp$. По (2) $y^\perp = c^\perp$. Противоречие. Значит, $\Delta(a,b)=\Delta(c,d)$.

Так как $|\Delta(a,b)| = \hat{a}+\hat{b}+\mu$ и $|\Delta(c,d)| = \hat{c}+\hat{d}+\mu$, то справедливо и последнее равенство. Лемма доказана.

Для подграфа Δ из Γ вершину x из $\Gamma-\Delta$, смежную с α вершинами из Δ, назовем α-точкой для Δ.

Лемма 3.11. *Пусть f,g — несмежные вершины из $[a]\cap[e]$ и cf, dg — ребра. Тогда:*

(1) если $[d]\cap[f]$ содержит γ вершин, а $[c]\cap[g]$ содержит δ вершин из $[b]\cap[e]$, то $\gamma+\delta = \hat{b}+\hat{e}$;

(2) либо $[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e] = K(u)$ и $[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e] = K(w)$ для некоторых несмежных вершин $u,w\in[b]\cap[e]$, либо один из μ-подграфов $[c]\cap[g]$, $[d]\cap[f]$ не пересекает $[b]\cap[e]$, а второй пересекает по подграфу из $K([b]\cap[e])$.

Доказательство. (1) Рассмотрим μ-подграфы $[c]\cap[g]$ и $[d]\cap[f]$. Если x — вершина из $[c]\cap[g]$ и $x\in[a]-([b]\cup[c])$, то $\{x,d,f\}$ является 3-кокликой из $[a]$. Противоречие. Значит, $[a]\cap[c]\cap[g]$ содержится в $([a]\cap[b])\cup([a]\cap[e])$. Аналогично, $[a]\cap[d]\cap[f]$ содержится в $([a]\cap[b])\cup([a]\cap[c])$.

Пусть вершина c является α-точкой для $[b]\cap[e]$, а f является β-точкой для $[b]\cap[e]$. Тогда d является α-точкой для $[a]\cap[e]$, а g является β-точка для $[a]\cap[e]$. В этом случае μ-подграф $[d]\cap[f]$ содержит $K(a)$, $\mu-\beta-\hat{c}$

вершин из $[a]\cap[b]$ и $\alpha-\hat{g}$ вершин из $[a]\cap[e]$. Отсюда получим следующее равенство:

$$\mu=\hat{a}+\mu-\beta-\hat{c}+\alpha-\hat{g}+\gamma,$$

где $\gamma=|[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e]|$. Симметрично, μ-подграф $[c]\cap[g]$ содержит $K(a)$, $\beta-\hat{d}$ вершин из $[a]\cap[b]$ и $\mu-\alpha-\hat{f}$ вершин из $[a]\cap[e]$. Отсюда получим равенство

$$\mu=\hat{a}+\beta-\hat{d}+\mu-\alpha-\hat{f}+\delta,$$

где $\delta=|[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e]|$. Сложив полученные равенства, имеем

$$\hat{c}+\hat{d}+\hat{f}+\hat{g}=2\hat{a}+\gamma+\delta.$$

Поскольку по лемме 3.10(3) $\hat{a}+\hat{b}=\hat{c}+\hat{d}$ и $\hat{a}+\hat{e}=\hat{f}+\hat{g}$, то $\gamma+\delta=\hat{b}+\hat{e}$.

(2) Пусть $u\in[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e]$, $w\in[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e]$. Тогда по лемме 3.10 $\gamma=\hat{w}$ и $\delta=\hat{u}$. Вершины u,w не смежны по лемме 2.3(2).

Пусть теперь μ-подграф $[c]\cap[g]$ не пересекает $[b]\cap[e]$. Тогда $\delta=0$ и из равенства, полученного в (1), имеем $\gamma=\hat{b}+\hat{e}$. Если w не принадлежит $K([b]\cap[e])$, то любая вершина x из $([b]\cap[e])-w^{\perp}$ не смежна с d и f, поэтому $x\in[c]\cap[g]$. Противоречие с предположением.

4. Исключительные тройки в графах без 3-лап с равномощными μ-подграфами

Так как граф Γ — минимальный контрпример к теореме 2, то по леммам 3.7, 3.8 Γ имеет диаметр 2 и не содержит 4-коклик. Далее, мы хотим доказать, что $\Gamma=a^{\perp}\cup b^{\perp}$ для любой сильной пары вершин a,b из Γ. Предположим противное и назовем тройку вершин $\{x,y,z\}$ из Γ *особой*, если $\{x,y\}$ — сильная пара и $z\notin x^{\perp}\cup y^{\perp}$. Для 3-коклики $\{x,y,z\}$ из Γ положим $\Sigma(x,y,z)=\Delta(x,y)\cup\Delta(x,z)\cup\Delta(y,z)$, где $\Delta(u,w)=K(u)\cup K(w)\cup([u]\cap[w])$, $u,w\in\{x,y,z\}$. Особую тройку $\{x,y,z\}$ назовем *исключительной*, если $\Gamma=\Sigma(x,y,z)$. В леммах 4.2–4.6 предполагается, что $\{a,b,e\}$ — исключительная тройка из Γ и c,d — несмежные вершины из $[a]\cap[b]$. Очевидно, что если $\{a,b,e\}$ — исключительная тройка из Γ, то и $\{b,a,e\}$ является исключительной тройкой из Γ.

Лемма 4.1. *Пусть $\{x,y,z\}$ является 3-кокликой из Γ. Тогда:*

(1) *любая вершина из $K([x]\cap[z])$ смежна с каждой вершиной из $K([y]\cap[z])$;*

(2) *если $\{x,y,z\}$ — особая тройка и один из μ-подграфов $[x]\cap[z]$, $[y]\cap[z]$ имеет нетривиальное ядро, то другой не является кликой.*

Доказательство. (1) Пусть $\Sigma = \Sigma(x,y,z)$, $u \in K([x]\cap[z])$ и w — не смежная с u вершина из $K([y]\cap[z])$. Покажем, что μ-подграф $[u]\cap[w]$ содержится в Σ. Пусть $|[u]\cap[y]\cap[z]| = \alpha$, $|[w]\cap[x]\cap[z]| = \beta$ и $|[x]\cap[y]\cap[u]\cap[w]| = \gamma$. Тогда $|[u]\cap[x]\cap[y]| = \mu-\alpha$, $|[w]\cap[x]\cap[y]| = \mu-\beta$.

Если μ-подграф $[x]\cap[y]$ содержится в $u^\perp\cup w^\perp$, то $\mu = (\mu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma$. Следовательно, $\mu = \alpha+\beta+\gamma$. С другой стороны, μ-подграф $[u]\cap[w]$ содержит α вершин из $[y]\cap[z]$, β вершин из $[x]\cap[z]$, γ вершин из $[x]\cap[y]$ и $\hat{z}$ вершин из $K(z)$. Противоречие.

Значит, $[x]\cap[y]$ не содержится в $u^\perp\cup w^\perp$. Пусть $f \in ([x]\cap[y])-(u^\perp\cup w^\perp)$. По лемме 3.3(2) $[u]\cap[w]$ содержит вершину g из $[x]\cap[y]$. Очевидно, что g не смежна с f, 3-коклика $\{g,z,f\}$ является особой тройкой из Γ и u,w — несмежные вершины из μ-подграфа $[g]\cap[z]$. Теперь по лемме 3.10(3) $\Delta(z,f) = \Delta(u,w)$. Но $\Delta(z,f)$ содержится в Σ, значит, и μ-подграф $[u]\cap[w]$ содержится в Σ.

Обозначим через s_x валентность вершины x в подграфе Σ. Ввиду того, что $\Sigma = u^\perp\cup y^\perp = w^\perp\cup x^\perp$, мы имеем $|\Sigma| = s_u+s_y+2-\mu = s_w+s_x+2-\mu$. С другой стороны, μ-подграф $[w]\cap[u]$ содержится в Σ, значит, $|\Sigma| \geq s_u+s_w+2-\mu$. Кроме того, $|\Sigma| > s_x+s_y+2-\mu$. Складывая два последних неравенства, получаем противоречие.

(2) Пусть $\{x,y,z\}$ — особая тройка, f,g — несмежные вершины из $[x]\cap[y]$, один из μ-подграфов $[x]\cap[z]$, $[y]\cap[z]$, например $[x]\cap[z]$, является кликой и подграф $K([y]\cap[z])$ не пуст. В этом случае по пункту (1) вершина w из $K([y]\cap[z])$ смежна с каждой вершиной из $[x]\cap[z]$ и с одной из вершин $\{f,g\}$. Но тогда $|[w]\cap[x]| > \mu$. Противоречие.

Лемма 4.2. *Ни один из μ-подграфов $[a]\cap[b]$, $[a]\cap[e]$, $[b]\cap[e]$ не является кликой.*

Доказательство. Подграф $[a]\cap[b]$ не является кликой по выбору вершин $\{a,b\}$. Пусть $[a]\cap[e]$ является кликой. Тогда по лемме 4.1(2) $K([a]\cap[b])$ и $K([b]\cap[e])$ — пустые подграфы, а каждый из подграфов $[a]\cap[b]$, $[b]\cap[e]$ — ядерное расширение графа из класса $\mathcal{K}$.

Выберем в $([a]\cap[b])\cup([b]\cap[e])$ вершину w такую, что окрестность вершины w имеет наибольшее пересечение с $[a]\cap[e]$. Без потери общности рассуждений можно считать, что w принадлежит $[b]\cap[e]$.

Обозначим через d_j представителей ядер из $[a]\cap[b]$, смежных с w, а через c_j — представителей ядер, не смежных с w, где $j=1,\ldots,\delta$. Пусть $c=c_1$, $d=d_1$. Аналогично, обозначим через u_i,w_i представителей ядер в долях μ-подграфа $[b]\cap[e]$, где $i=1,\ldots,\varepsilon$. Пусть $w=w_1$, $u=u_1$ и пусть вершина c смежна с u_i, где $i=1,\ldots,\varepsilon$.

По лемме 3.10(3) мы имеем $\hat{b}+\hat{e}=\hat{u}_i+\hat{w}_i$, где $i=1,\ldots,\varepsilon$, и, значит, $\mu=\varepsilon(\hat{b}+\hat{e})$. Аналогично, $\hat{a}+\hat{b}=\hat{c}_j+\hat{d}_j$, где $j=1,\ldots,\delta$, и, значит, $\mu=\delta(\hat{a}+\hat{b})$.

Заметим, что μ-подграфы $[d_j]\cap[u]$ не пересекают $[a]\cap[e]$ для всех $j=1,\ldots,\delta$. Иначе $[d_j]\cap[a]\cap[e]$ содержит больше вершин, чем $[w]\cap[a]\cap[e]$, что противоречит выбору вершины w. По лемме 3.11(2) $[c_j]\cap[w]$ пересекают $[a]\cap[e]$ для всех $j=1,\ldots,\delta$.

Пусть $\varepsilon=1$. Тогда μ-подграф $[d]\cap[u]$ содержит только $K(b)$ и $K(c_j)$, $j=2,\ldots,\delta$. Но тогда $\mu=\hat{b}+\sum_{j=2}^{\delta}\hat{c}_j$. С другой стороны, $\mu=\sum_{j=1}^{\delta}(\hat{c}_j+\hat{d}_j)$. Противоречие, так как $\hat{c}+\hat{d}=\hat{a}+\hat{b}$. Аналогично рассматривается случай, когда $\delta=1$. Значит, $\varepsilon>1$ и $\delta>1$.

Пусть $z_j\in[c_j]\cap[w]\cap[a]\cap[e]$. Тогда $\{u,d_j,z_j\}$ — исключительная тройка и $\Gamma=b^{\perp}\cup z_j^{\perp}$, поэтому $|\Gamma|=\hat{a}+\hat{e}+\hat{b}+3\mu=\hat{b}+\hat{z}_j+3\mu$ для всех j. По лемме 3.11(1) $|[c_j]\cap[w]\cap[a]\cap[e]|=\hat{a}+\hat{e}$. Следовательно, $[c_j]\cap[w]\cap[a]\cap[e]=K(z_j)$ и $\hat{z}_j=\hat{a}+\hat{e}$. Симметрично, $\hat{b}=\hat{u}+\hat{d}_j$, $\hat{c}_j=\hat{a}+\hat{u}$.

Пусть $z_1=z$. Заметим, что $K(z_j)\neq K(z_k)$ при $j\neq k$ и вершина z смежна в точности с $K(c)\cup\left(\bigcup_{j=2}^{\delta}K(d_j)\right)$ в $[a]\cap[b]$. Действительно, пусть, например, z смежна с c_2. Тогда $z^{\perp}\cup d^{\perp}=c_2^{\perp}\cup w^{\perp}=z^{\perp}\cup b^{\perp}=\Gamma$. Противоречие, поскольку $u\notin z^{\perp}\cup d^{\perp}$. Аналогично, каждая из вершин z_j смежна в точности с $K(w)\cup(\bigcup_{i=2}^{\varepsilon}K(u_i))$ в $[b]\cap[e]$. Такое же рассуждение показывает, что вершина c_2 смежна в точности с $K(u)\cup(\bigcup_{i=2}^{\varepsilon}K(w_i))$ в $[b]\cap[e]$.

Далее, подграф $([a]\cap[u])-[e]$ равен $\bigcup_{j=1}^{\delta}K(c_j)$, и, значит, μ-подграф $[a]\cap[u]$ является кликой. А μ-подграф $[a]\cap[w]$ не является кликой, поскольку содержит несмежные вершины d,z. Таким образом, тройка вершин $\{a,w,u\}$ является исключительной. По лемме 4.1(2) $K([a]\cap[w])$ пусто. Значит, $[a]\cap[e]\cap[w]=\bigcup_{j=1}^{\delta}K(z_j)$.

Таким образом, $[a]\cap[e]\cap[w]$ содержит $\delta(\hat{a}+\hat{e})$ вершин, а $[a]\cap[e]\cap[u]$ содержит $\delta(\hat{b}-\hat{u})$ вершин. Но тогда μ-подграф $[a]\cap[e]$ содержит $\delta(\hat{a}+\hat{e}+\hat{b}-\hat{u})$ вершин. С другой стороны, $\mu=\delta(\hat{a}+\hat{b})$. Значит, $\hat{e}=\hat{u}$ и $\hat{b}=\hat{w}$. Отсюда $\hat{c}_j=\hat{a}+\hat{e}$, $\hat{d}_j=\hat{b}-\hat{e}$, $j=1,\ldots,\delta$. Поскольку для каждой вершины u_i подграф $[u_i]\cap[a]\cap[e]$ совпадает с $[w]\cap[a]\cap[e]$, то, применяя те же рассуждения к u_i, получим $\hat{b}=\hat{u}_i$ и $\hat{e}=\hat{w}_i$, $i=2,\ldots,\varepsilon$.

Теперь вершина u_2, не смежная с d по выбору, смежна со всеми вершинами из $[a]\cap[e]\cap[w]$. Следовательно, u_2 смежна со всеми вершинами из $[a]\cap[e]\cap[d]$. Но тогда, как и ранее, $|[a]\cap[e]\cap[d]|=\hat{a}+\hat{e}$ и $\hat{d}=\hat{a}+\hat{e}$. Отсюда $\varepsilon=\delta=2$. Аналогичные рассуждения дают $\hat{c}_2=\hat{a}+\hat{e}$, $\hat{d}_2=\hat{a}+\hat{e}$. Поскольку $\hat{a}+\hat{b}=\hat{c}+\hat{d}=2(\hat{a}+\hat{e})$, то $\hat{b}=\hat{a}+2\hat{e}$. Далее, μ-подграф $[z]\cap[b]$

содержит $K(w) \cup K(u_2) \cup K(c) \cup K(d_2)$, т.е. содержит $4\hat{a} + 6\hat{e}$ вершин. Однако μ-подграф $[a] \cap [b]$ содержит $4(\hat{a} + \hat{e})$ вершин. Противоречие. Лемма доказана.

Среди исключительных троек зафиксируем тройку $\{a, b, e\}$ с минимальной валентностью вершины a.

Лемма 4.3. *Пусть подграф $K([b] \cap [e])$ содержит вершину z. Если $x \in \Gamma - z^{\perp}$, то $\Gamma = x^{\perp} \cup z^{\perp}$, $k_x = k_a$ и x лежит в исключительной тройке.*

Доказательство. Так как z принадлежит $K([b] \cap [e])$, то $x \in K(a) \cup ([a] \cap [b]) \cup ([a] \cap [e])$. Не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что $x \in [a] \cap [e]$. По лемме 4.1(2) x не смежна с некоторой вершиной y из $[a] \cap [e]$, поэтому $\{x, y, b\}$ — исключительная тройка и $k_x \geq k_a$. Отсюда $\Gamma = x^{\perp} \cup z^{\perp}$ и $k_x = k_a$.

Лемма 4.4. *Граф $[b] \cap [e]$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$.*

Доказательство. По лемме 4.2 подграф $[b] \cap [e]$ не является кликой. По лемме 3.10(2) $[b] \cap [e] - K([b] \cap [e])$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Пусть $K([b] \cap [e])$ содержит вершину z и пусть для определенности $z \in [d] - [c]$. Если $[z]$ содержит α вершин из $[a] \cap [e]$, то $|[z] \cap [a] \cap [b]| = \mu - \alpha$. По лемме 4.2 подграф $[a] \cap [e]$ не является кликой. Значит, без ограничения общности $\alpha \leq \mu - \alpha$. Тогда $\mu - \alpha \geq \mu/2$. Далее, по леммам 3.10(2) и 4.1(2) для любой вершины $f \in ([a] \cap [e]) - [z]$ найдется вершина $g \in [a] \cap [e] \cap [z]$ такая, что $[a] \cap [e] - f^{\perp} = K(g)$. Ввиду леммы 4.3, $k_g = k_e$. Отсюда $K(g) = K(e)$. По лемме 4.3 $([a] \cap [e]) - g^{\perp} = K(f)$, поэтому $[a] \cap [e]$ содержит $(\mu - \alpha)/\hat{a}$ различных ядер с числом вершин $\hat{g}$. Отсюда $\mu - \alpha = \mu/2$ и $\hat{a} = \hat{g}$. Таким образом, граф $[a] \cap [e]$ является $\hat{a}$-расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Симметрично, $k_b = k_a$ и граф $[a] \cap [b]$ изоморфен $[a] \cap [e]$.

Пусть теперь u, w — несмежные вершины из $[b] \cap [e]$. Тогда $u^{\perp} \cup w^{\perp} = e^{\perp} \cup b^{\perp}$, поэтому $k_u = k_w = k_a$ и граф $[b] \cap [e] - K([b] \cap [e])$ является $\hat{a}$-расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Напомним, что $z^{\perp} \cup c^{\perp} = \Gamma$, поэтому $z \in K([d] \cap [e])$. Отсюда $[c]$ не пересекает $K([b] \cap [e])$ и $|[d] \cap [a] \cap [b]| > \mu/2$. С другой стороны, $|[d] \cap [a] \cap [b]| = \mu/2$ по структуре графа $[c] \cap [e]$. Противоречие.

Лемма 4.5. *Пусть $\{a,b,e\}$ — исключительная тройка и $[b]\cap[e]$ лежит в классе $\mathcal{K}$. Пусть также подграф $([a]\cap[e])-K([a]\cap[e])$ состоит из δ долей $K(f_i)\cup K(g_i)$, где f_ic, g_id — ребра; подграф $[c]\cap[b]\cap[e]=\bigcup\limits_{j=1}^{\varepsilon}K(u_j)$, $[d]\cap[b]\cap[e]=\bigcup\limits_{j=1}^{\varepsilon}K(w_j)$, где $K(u_j)\cup K(w_j)$ — доли подграфа $[b]\cap[e]$, $j=1,\ldots,\varepsilon$. Тогда доли $K(u_j)\cup K(w_j)$ можно упорядочить так, что $K(u_j)=[c]\cap[g_j]\cap[b]\cap[e]$, $K(w_j)=[d]\cap[f_j]\cap[b]\cap[e]$, для $j=1,\ldots,\delta$. Более того, пары вершин f_iu_j, g_iw_j являются ребрами тогда и только тогда, когда $i\neq j$, пары вершин f_iw_j, g_iu_j являются ребрами тогда и только тогда, когда $i=j$, $i=1,\ldots,\delta$, $j=1,\ldots,\varepsilon$.*

Доказательство. Если f,g — несмежные вершины из $[a]\cap[e]$ и cf, dg — ребра, то, ввиду лемм 4.4 и 3.11(2), оба графа $[c]\cap[g]$ и $[d]\cap[f]$ пересекают $[b]\cap[e]$. По лемме 2.3(2) в подграфе $[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e]$ нет вершин, смежных с вершинами из $[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e]$, поэтому указанные графы совпадают с $K(u)$, $K(w)$ для некоторых несмежных вершин u,w из $[b]\cap[e]$. Отсюда число ε долей в редукции графа $[b]\cap[e]$ не меньше числа долей δ в редукции графа $([a]\cap[e])-K([a]\cap[e])$. Теперь $[g_i]\cap(K(u_1)\cup\ldots\cup K(u_\varepsilon))=K(u_i)$, следовательно, вершина g_i не смежна с $u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_\varepsilon$. Поэтому g_i смежна с $w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_\varepsilon$. Утверждение о смежности вершин f_i с u_j доказывается аналогично. Лемма доказана.

В оставшихся леммах этого раздела зафиксируем обозначения, введенные в лемме 4.5.

Лемма 4.6. *Если $z\in K([a]\cap[b])$, то подграф $([z]\cap[e])-K([a]\cap[e])$ не является кликой.*

Доказательство. Допустим противное. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что вершина z смежна с f_1. Так как $[z]\cap[e]$ — клика, то подграф $[z]\cap[b]\cap[e]$ содержится в $[f_1]$. Значит, $[z]\cap[e]$ содержит $w_1,u_2,\ldots,u_\delta$. Но тогда $[z]\cap[a]\cap[e]$ содержится в $[w_1]$. Значит, $[z]\cap[e]$ содержит $f_1,g_2,\ldots,g_\varepsilon$.

Если числа δ и ε больше 1 и одно из них больше 2, то по лемме 4.5 $[z]\cap[e]$ содержит пары несмежных вершин g_2u_3 или u_2g_3.

Пусть $\delta=1$. По леммам 4.1(2) и 4.5 $z^\perp$ содержит $K([a]\cap[e])$, $f_1,w_1,u_2,\ldots,u_\varepsilon$. Далее, $e^\perp-[z]$ — клика, поэтому $\Gamma=z^\perp\cup x^\perp$ и $\hat{x}=\hat{e}$ для любой вершины $x\in e^\perp-[z]$. В частности, $k_{g_1}=k_e$, $k_{f_1}=k_a$. По лемме

4.4 $K([g_1] \cap [b])$ пусто. Теперь u_1, d — несмежные вершины из $[g] \cap [b]$ и $K(u_1) = K(e)$. Поэтому $k_d = k_b$ и $k_c = k_a$. Снова по лемме 4.4 $K([d] \cap [e])$ — пустой граф.

Если $\delta = 1$ и $\varepsilon = 1$, то $\mu = \hat{b} + \hat{e}$. В случае $k_a = k_b$ мы получим $[z] \cap [e] = K(f_1) \cup K(w_1)$ и $\mu = 2\hat{a}$. Противоречие. Значит, $k_a < k_b$ и $K([a] \cap [e])$ содержит некоторую вершину s. Так как $[d] \cap [e]$ содержит $K(g_1) \cup K(w_1)$, то $[s]$ содержит $\mu - \hat{b}$ вершин из $[a] \cap [b]$ и s смежна с w_1. Отсюда $[u_1] \cap [a] \cap [e] = K(g_1)$ и $([a] \cap [b]) - K(d)$ содержится в $[u_1]$. Противоречие с тем, что $z \notin [u_1]$.

Пусть $\delta = 1$ и $\varepsilon > 1$. Если $[w_i] \cap [c]$ содержит вершину s из $K([a] \cap [e])$, то по лемме 3.10 $\hat{s} = \hat{a} + \hat{e}$ и тройка $\{u_i, d, s\}$ является исключительной. Но $\hat{u}_i = \hat{b}$ и $s^\perp \cup u_i^\perp = \Gamma$ для $i \geq 2$, противоречие. Значит, для любого $i \geq 2$ подграф $[u_i] \cap [d]$ содержит вершину t_i из $K([a] \cap [e])$, тройка $\{c, w_i, t_i\}$ является исключительной и $\hat{t}_i = \hat{b} = \hat{a} + \hat{e}$. Теперь $|[z] \cap [e]| = \varepsilon\hat{b} + \mu - \hat{e} > \mu$.

Если $\varepsilon = 2$, то $[g_1]$ содержит несмежную с w_2 вершину z' из $K([a] \cap [b])$ и $\hat{z}' = \hat{e}$. В этом случае $[z'] \cap [b] \cap [e] = K(u_1) \cup K(u_2)$, поэтому $|[z'] \cap [a] \cap [e]| = \hat{b} + \hat{e}$. Противоречие с тем, что $([a] \cap [e]) - K(e)$ содержится в $[z']$.

Теперь $\varepsilon > 2$ и $[g] \cap [a] \cap [b]$ содержит вершины $d, z_2, \ldots, z_\varepsilon$, не смежные с $u_1, w_2, \ldots, w_\varepsilon$ соответственно. При этом $\hat{z}_i = \hat{b}$. Вычислим $|[c] \cap [a] \cap [e]|$. Заметим, что $[d] \cap [a] \cap [e]$ содержит $K(g_1)$ и $K(t_2), \ldots, K(t_\varepsilon)$, поэтому $|[c] \cap [a] \cap [e]| = \hat{b} + (\varepsilon - 1)\hat{e}$. Таким образом, $|[z] \cap [e]| = \varepsilon\hat{b} + (\mu - \hat{e}) > \mu$. Противоречие.

Случай, когда $\varepsilon = 1$ и $\delta > 1$, рассматривается аналогично. Пусть $\delta = 2$ и $\varepsilon = 2$. Так как $\Gamma - z^\perp$ является кликой, то $\Gamma = z^\perp \cup x^\perp$ для любой вершины x из $\Gamma - z^\perp$. Отсюда $\hat{x} = \hat{e}$ для любой вершины x из $\Gamma - z^\perp$ и $\hat{y} = \hat{a}$ для любой вершины y из $[z] \cap [e]$. Если $K([a] \cap [e])$ пусто, то $\mu = 2\hat{a} + 2\hat{e} = 2\hat{b} + 2\hat{e}$. Значит, $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d}$. Кроме того, нетрудно заметить, что $K([a] \cap [b]) = K(z)$. Но тогда μ-подграф $[g_1] \cap [z]$ содержит $4\hat{a}$ вершин. Противоречие, поскольку $|[a] \cap [b]| > 4\hat{a}$.

Отсюда $K([a] \cap [e])$ не пусто. Тогда, как и выше, число долей μ-подграфа $[a] \cap [b]$ равно двум, $K([a] \cap [b]) = K(z)$ и $K([a] \cap [e]) = K(z_1)$ для некоторой вершины z_1 из $K([a] \cap [e])$. Более того, $\Gamma - z_1^\perp$ является кликой и $\hat{x} = \hat{b}$ для любой вершины x из $\Gamma - z_1^\perp$ и $\hat{y} = \hat{a}$ для любой вершины y из $[z_1] \cap [e]$. Отсюда $\hat{b} = \hat{e}$. Но тогда μ-подграф $[b] \cap [e]$ содержит $4\hat{b}$ вершин. С другой стороны, $[g_1] \cap [c]$ содержит $3\hat{b} + \hat{a}$ вершин. Следовательно, $\hat{b} = \hat{a}$. По лемме 4.4 $K([a] \cap [e])$ пусто. Противоречие.

Лемма 4.7. *Граф* Γ *не содержит исключительных троек.*

Доказательство. Пусть $\{a, b, e\}$ — исключительная тройка с наименьшей валентностью k_a. По лемме 4.4 $\Gamma - a^{\perp}$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$.

По лемме 4.2 для любой вершины x из $\Gamma - a^{\perp}$ подграф $[a] \cap [x]$ не является кликой. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что вершина e имеет наибольшую валентность среди вершин из $\Gamma - a^{\perp}$.

Покажем, что μ-подграф $[a] \cap [e]$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Если $z \in K([a] \cap [e])$, то $\Gamma = z^{\perp} \cup b^{\perp}$. Для несмежных вершин $x \in ([z] \cap [a] \cap [b]) - K([a] \cap [b])$ и $y \in [z] \cap [b] \cap [e]$ верно равенство $\hat{x} + \hat{y} = \hat{z} + \hat{b}$. Далее, $\hat{x} \leq \hat{b}$, $\hat{y} \leq \hat{e}$ и по лемме 3.10 $\hat{z} = \hat{a} + \hat{e}$. Это противоречит предыдущему равенству.

Теперь число долей δ в редукции графа $[a] \cap [e]$ совпадает с числом долей в редукции графа $[b] \cap [e]$, поэтому $\hat{a} = \hat{b}$ и $k_a = k_b$. Отсюда, в частности, $k_c = k_d = k_a$.

Число долей в редукции графа $([a] \cap [b]) - K([a] \cap [b])$ не больше δ, поэтому либо $k_a = k_e$, либо граф $K([a] \cap [b])$ не пуст. Но в первом случае в редукции $\overline{\Gamma}$ графа Γ все μ-подграфы изоморфны графу $K_{\delta \times 2}$. По лемме 1.11 граф $\overline{\Gamma}$ регулярен и по теореме 1 из работы [5] $\overline{\Gamma}$ изоморфен 3×3-решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Шлефли, что противоречит выбору Γ.

Пусть $z \in K([a] \cap [b])$. По лемме 4.6 $[z]$ содержит несмежные вершины f_1 из $[a] \cap [e]$ и w_2 из $[b] \cap [e]$. Пусть g_1, u_2 — антиподы для f_1, w_2 в графах $[a] \cap [e]$, $[b] \cap [e]$ соответственно. Тогда $\{g_1, u_2, z\}$ — исключительная тройка и $\hat{z} = 2\hat{a}$. Значит, $\hat{f}_1 + \hat{w}_2 = \hat{e} + 2\hat{a}$, $\hat{g}_1 + \hat{u}_2 = \hat{e}$.

Пусть, как и в лемме 3.6, $cf_i w_i d g_i u_i$ — шестиугольники из Γ, $i = 1, \ldots, \delta$. Тогда $\hat{g}_i + \hat{w}_i = \hat{e} + \hat{c} = \hat{f}_i + \hat{u}_i$, следовательно, $\hat{g}_i = \hat{u}_i$ и $\hat{f}_i = \hat{w}_i$.

Если $[z]$ содержит g_2, то g_2, w_2 — несмежные вершины из $[e] \cap [z]$ и $\hat{g}_2 + \hat{w}_2 = 2\hat{a} + \hat{e}$. Противоречие с тем, что $\hat{u}_2 + \hat{w}_2 = \hat{g}_2 + \hat{w}_2 = \hat{a} + \hat{e}$. Значит, $[z]$ содержит f_2, и, симметрично, $[z]$ содержит w_1. Но теперь w_1 и f_2 — несмежные вершины из $[e] \cap [z]$ и $\Gamma = w_1^{\perp} \cup f_2^{\perp}$

Пусть ε — число долей в редукции графа $([a] \cap [b]) - K([a] \cap [b])$. Тогда $[z]$ содержит $\hat{w}_2 + \varepsilon \hat{f}_1$ вершин из $[b] \cap [e]$, $\hat{f}_1 + \varepsilon \hat{w}_2$ вершин из $[a] \cap [e]$ и $\mu \geq (\varepsilon + 1)\ (\hat{e} + 2\hat{a})$.

Напомним, что $[g_1] \cap [u_2]$ содержит $f_3, \ldots, f_\delta$ и $w_3, \ldots, w_\delta$, причем $f_i w_j$ — ребро, только если $i = j$. Ввиду леммы 4.5, $\delta \leq 4$. В силу неравенства из предыдущего абзаца $\delta > 2$.

Пусть $\delta = 3$. Тогда $\mu = 3(\hat{a} + \hat{e})$, $[g_1] \cap [u_2]$ содержит $K(e)$, $K(g_2) \cup K(u_1)$ и $K(f_3) \cup K(w_3)$. Отсюда $\mu = 2\hat{e} + 2\hat{f}_3$ и $2\hat{f}_3 = \hat{e} + 3\hat{a}$. Далее, $[z] \cap [e]$ содержит $K(f_1) \cup K(f_2)$, $K(w_1) \cup K(w_2)$ и $K(g_3) \cup K(u_3)$, поэтому $2\hat{g}_3 = \hat{e} - \hat{a}$ и $\hat{e} \geq 3\hat{a}$.

Наконец, $[f_1]\cap[w_2]$ содержит $K(z)\cup K(e)$, $K(f_2)\cup K(w_1)$ и $K(g_3)\cup K(u_3)$, следовательно, $[f_1]\cap[w_2]\cap[a]\cap[b]=K(z)$. Теперь число различных ядер $K(z_i)$ в графе $[a]\cap[b]$ не меньше 5, причем каждая вершина z_i смежна с парой вершин из $\{f_1,f_2,f_3\}$. Но если различные вершины z_1 и z_2 смежны с f_i, f_j, то они смежны и с w_i, w_j, причем $|[f_i]\cap[w_j]\cap[a]\cap[b]|=\hat{z}$. Противоречие.

Итак, $\delta=4$, $\mu=4(\hat{a}+\hat{e})$. Подграф $[g_1]\cap[u_2]$ содержит $K(e)$, долю $K(g_2)\cup K(u_1)$, состоящую из $\hat{e}$ вершин, и две доли $K(f_3)\cup K(w_4)$, $K(f_4)\cup K(w_3)$. Отсюда $\mu=4\hat{e}$, противоречие. Лемма доказана.

5. Особые тройки в графах без 3-лап с равномощными μ-подграфами

В этом разделе завершается доказательство теоремы 2. Пусть $\{a,b,e\}$ — особая тройка из Γ, c,d — несмежные вершины из $[a]\cap[b]$. В предыдущем разделе мы доказали, что тройка $\{a,b,e\}$ не является исключительной тройкой.

Лемма 5.1. *Если $\{a,b,e\}$ — особая тройка, то $\Sigma(a,b,e)$ является α-расширением 3×3-решетки, треугольного графа $T(6)$ или графа Шлефли.*

Доказательство. Покажем, что $\Sigma(a,b,e)$ содержит μ-подграфы своих вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Пусть $x,y\in\Sigma(a,b,e)$, $d(x,y)=2$ и $[x]\cap[y]$ не лежит в $\Sigma(a,b,e)$. Без ограничения общности $x\in[a]\cap[b]$, $y\in[b]\cap[e]$ и $[x]\cap[y]$ содержит вершину b' из $[b]-(K(b)\cup[a]\cup[e])$. Если y не смежна с некоторой вершиной z из $[b]\cap[e]$, то zx — ребро и по лемме 2.1 b' смежна с z. Но тогда по лемме 1.5 $b'\in K(b)$. Значит, $x\in K([a]\cap[b])$, $y\in K([b]\cap[e])$. По лемме 4.1(2) x смежна с y. Противоречие с выбором x,y.

По лемме 4.7 $\Sigma(a,b,e)$ является собственным подграфом из Γ и удовлетворяет условию теоремы 2. Так как Γ — минимальный контрпример и не содержит 4-коклик, то по индуктивному предположению $\Sigma(a,b,e)$ является α-расширением 3×3-решетки, треугольного графа $T(6)$ или графа Шлефли.

Лемма 5.2. *Граф Γ не содержит особых троек.*

Доказательство. Пусть $\{a,b,e\}$ является особой тройкой и $\Sigma=\Sigma(a,b,e)$. По лемме 5.1 все μ-подграфы для вершин из Σ изоморфны α-расширению графа из класса $\mathcal{K}$ с одним и тем же числом долей m, где $m\in\{1,2,4\}$.

Далее, если $x \in \Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$, то $\{a, b, x\}$ — особая тройка. Более того, поскольку Σ и $\Sigma(a, b, x)$ содержат μ-подграф $[a] \cap [b]$, то подграф $\Sigma(a, b, x)$ изоморфен Σ. Аналогично, подграф $\Sigma(a, y, e)$ изоморфен Σ для любой вершины $y \in \Gamma - (a^\perp \cup e^\perp)$. Следовательно, μ-подграфы $[a] \cap [x]$ изоморфны μ-подграфу $[a] \cap [b]$ для любой вершины $x \in \Gamma - a^\perp$. Ввиду строения графов из заключения леммы 5.1 любая вершина из Σ лежит в 3-коклике из Σ, т.е. лежит в особой тройке. Значит, вышеприведенное рассуждение справедливо для любой вершины из Σ. Но тогда все μ-подграфы из Γ изоморфны. Итак, все μ-подграфы из Γ регулярны и по лемме 1.11 граф Γ регулярен. По основному результату из [3] Γ является α-расширением $3 \times m$-решетки, $m \geq 4$ или треугольного графа $T(7)$. Противоречие с выбором Γ. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. По условию теоремы 2 граф Γ содержит 3-коклику. Пусть $\{x, y, z\}$ — 3-коклика из Γ. По лемме 5.2 μ-подграфы $[x] \cap [y]$, $[x] \cap [z]$ и $[y] \cap [z]$ являются кликами. По лемме 4.1(1) любая вершина из $[x] \cap [y]$ смежна с любой вершиной из $[x] \cap [z]$. Но тогда ни одна вершина из $[y] \cap [z]$ не смежна ни с одной вершиной из $([x] \cap [y]) \cup ([x] \cap [z])$. Однако в этом случае вершины из $[y] \cap [z]$ находятся на расстоянии больше чем 2 от x в графе Γ. Противоречие с леммой 3.7. Теорема доказана.

Литература

1. Numata M. On a characterization of a class of regular graphs of diameter 2 // Osaka J. Math. 1974. Vol.11. P.389–400.

2. Brouwer A.E., Numata M. A characterization of some graphs which do not contain 3-claws // Discrete Math. 1994. Vol.124. P.49–54.

3. Кабанов В.В., Махнев А.А. Кореберно регулярные графы без 3-лап // Матем. заметки. 1996. Т.60, №4. С.495–503.

4. Кабанов В.В., Махнев А.А. Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности // Матем. сб. 1996. Т.187, №10. С.73–86.

5. Terwilliger P. Distance-regular graphs with girth 3 or 4 // J. Combin. Th. (B). 1985. Vol.39. P.265–281.

6. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin e.a.: Springer, 1989.

Статья поступила 14.10.1997 г.